18 задание ЕГЭ

(«Знание основных понятий и законов математической логики»)

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

• $\mathbf{X = X}$
• $\mathbf{X \wedge Y = Y \wedge X}$
• $\mathbf{X \vee Y = Y \vee X}$
• $\mathbf{(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge Z}$
• $\mathbf{A \vee 0 = A}$
• $\mathbf{A \wedge 1 = A}$
• $\mathbf{A \wedge 0 = 0.}$

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

• $X \lor \neg X = 1$
• $X \land \neg X = 0$
• $\neg\neg X = X$
• $(X \lor Z) \land (Y \lor Z) = (X \land Y) \lor Z$
• $\neg(X \lor Y) = \neg X \land \neg Y$
• $\neg(X \land Y) = \neg X \lor \neg Y$
• $A \land A = A$
• $A \lor A = A$
• $A \lor 1 = 1$
• $A \rightarrow B = \neg A \lor B$
• $A \equiv B = (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$;
• $A \equiv B = (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B)$.

1) Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in A) \to ((x \in \{3, 5, 7, 11, 12, 15\}) \land (x \in \{5, 6, 12, 15\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества А.

2) На числовой прямой даны два отрезка: P = [24; 49] и Q = [28; 53]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка А, что формула

$$(x \in A) \to ((x \in P) \land (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

3) (http://kpolyakov.spb.ru 135) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 14) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

4) Введём выражение $M \;\&\; K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число A, такое что выражение

$$(X \;\&\; A \neq 0) \rightarrow ((X \;\&\; 30 \neq 0) \;\wedge\; (X \;\&\; 20 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

1. $(x \in A) \rightarrow ((x \in \{3, 5, 7, 11, 12, 15\}) \wedge (x \in \{5, 6, 12, 16\})) = 1$
2. $(x \in A) \rightarrow ((x \in [24; 49]) \wedge (x \in [28; 53])) = 1$
3. $ДЕЛ(x, A) \rightarrow (ДЕЛ(x, 14) \wedge ДЕЛ(x, 21)) = 1$
4. $(X \,\&\, A \neq 0) \rightarrow ((X \,\&\, 30 \neq 0) \wedge (X \,\&\, 20 \neq 0)) = 1$

$$A \rightarrow (B \wedge C) = 1$$

$A \rightarrow (B \wedge C) = 1$

$\neg A \vee (B \wedge C) = 1$

$A = (B \wedge C)$

$A \rightarrow B = \neg A \vee B;$

$A \vee \neg A = 1$

1. A={3, 5, 7, 11, 12, 15} ∩ {5, 6, 12, 16} ={5, 12} Ответ: 60
2. A=[24; 49] ∩ [28; 53] =[28; 49] Ответ: 21
3. A= ДЕЛ(*x*, 14 и 21) =НОК(14, 21) =42 Ответ: 42
4. A = 30& 20 = & =20 Ответ: 20

1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	0	0

Обозначим через m&n поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например $14\&5=1110_2\&0100_2=0100_2=4$.
Для какого наименьшего неотрицательного целого числа А формула

$$X\&19\neq 0 \rightarrow (x\&17=0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

$$X\&19 \neq 0 \rightarrow (x\&17=0 \rightarrow x\&A \neq 0)=1$$

$$B \rightarrow (\neg C \rightarrow A) =1$$

$$\neg B \vee (C \vee A) =1$$

$$(\neg B \vee C) \vee A =1$$

$$\neg A = \neg B \vee C$$

$$A= \neg(\neg B \vee C)$$

$$A = B \wedge \neg C$$

$$A=19\&\ \text{not}(17)= \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \neg 1 & \neg 0 & \neg 0 & \neg 0 & \neg 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} =2$$

$A \vee (?) = 1$

$\neg A \vee (?) = 1$

$A \wedge (?) = 0$

$\neg A \wedge (?) = 0$

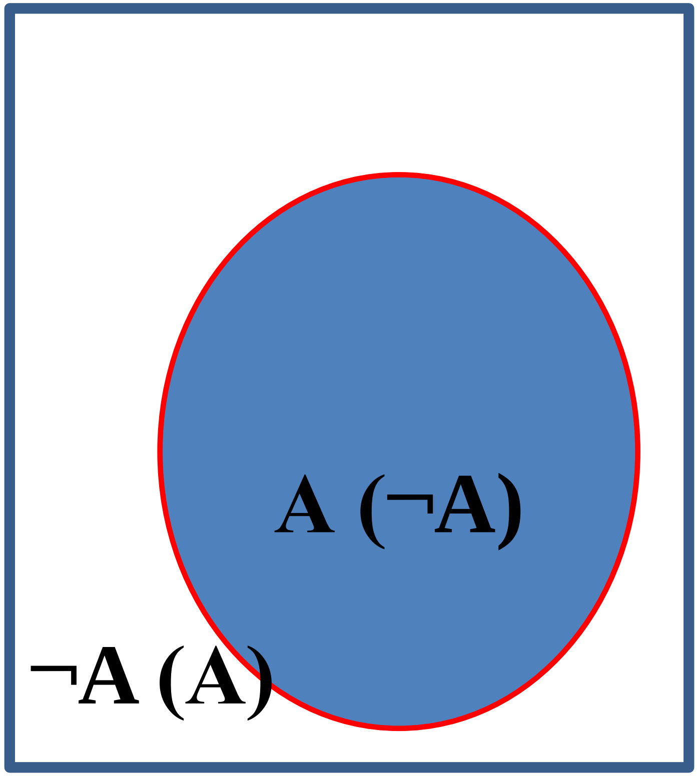
$A = \{B, C, \neg B, \neg C, B \vee C, \neg B \vee C,$

$B \vee \neg C, \neg B \vee \neg C, B \wedge C,$

$\neg B \wedge C, B \wedge \neg C, \neg B \wedge \neg C\}$

$A \wedge \neg A = 0$

$A \vee \neg A = 1$



•**(К.Ю. Поляков 164(М.А. Кузнецова))** Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И»

•между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число A, такое что выражение

$$(((X \& 13 \neq 0) \vee (X \& 39 = 0)) \rightarrow (X \& 13 \neq 0)) \vee ((X \& A = 0) \wedge (X \& 13 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

$$((\,(X \,\&\, 13 \neq 0) \vee (X \,\&\, 39 = 0)) \to (X \,\&\, 13 \neq 0)) \quad \vee$$

$$((X \,\&\, A = 0) \wedge (X \,\&\, 13 = 0))=1$$

$$((\,B \vee \neg C\,) \to B) \;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$((\neg B \wedge C\,) \vee \;\; B) \;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$((\neg B \vee \;\; B) \wedge (\,C \;\vee\;\; B) \;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$(1 \wedge (\,C \;\vee\;\; B)) \;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$(\,C \;\vee\;\; B) \;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$C \;\vee\; B \;\;\vee\; (\neg A \wedge \neg B)=1$$

$$C \;\vee\; (B \;\;\vee\; \neg A) \wedge (B \;\;\vee\;\; \neg B)=1$$

$$C \;\vee\; (B \;\;\vee\; \neg A)=1$$

$$(C \;\vee\; B\,) \;\vee\; \neg A=1$$

$$A= C \;\vee\; B$$

$$A=39 \;\vee\; 13= \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \;=\; 47$$

177) (ПОЛЯКОВ К)Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите набольшее натуральное число A, такое что выражение

$$((x \& 38 = 0) \vee (x \& 57 = 0)) \rightarrow ((x \& 11 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

$$((x \& 38 = 0) \vee (x \& 57 = 0)) \to ((x \& 11 \neq 0) \to (x \& A = 0))=1$$

$$(\neg B \vee \neg C) \to (D \to A)=1$$

$$(B \wedge C) \vee \neg D \vee A=1$$

$$\underline{((B \wedge C) \vee \neg D)} \vee A=1$$

$$\neg A= \neg((B \wedge C) \vee \neg D)$$

$$A= (B \wedge C) \vee \neg D$$

$A=38 \& 57 \vee NOT(11)=$

38	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
57	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
Not(11)	$\neg$0	$\neg$0	$\neg$0	$\neg$0	$\neg$0	$\neg$0	$\neg$1	$\neg$0	$\neg$1	$\neg$1

$\vee$ NOT(11)- приведет к переполнению. Но $\vee$-или позволяет им пренебречь. Наш ответ A=38 & 57 =32

23 задание ЕГЭ

(Умение строить и преобразовывать логические выражения)

Этапы подготовки

1. **Упрощение логических выражений**
2. **Построение дерева решений логического выражения**
3. **Предугадывание результатов построения дерева (умение видеть закономерности)**
4. **Обработка независимых логических выражений в системе**
5. **Метод замены**

Сколько существует различных наборов значений логических переменных X_1, X_2,X_3,…X_9, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям ?

$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)=1$

$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)=1$

…

$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_7) \vee (X_7 \equiv X_9)=1$

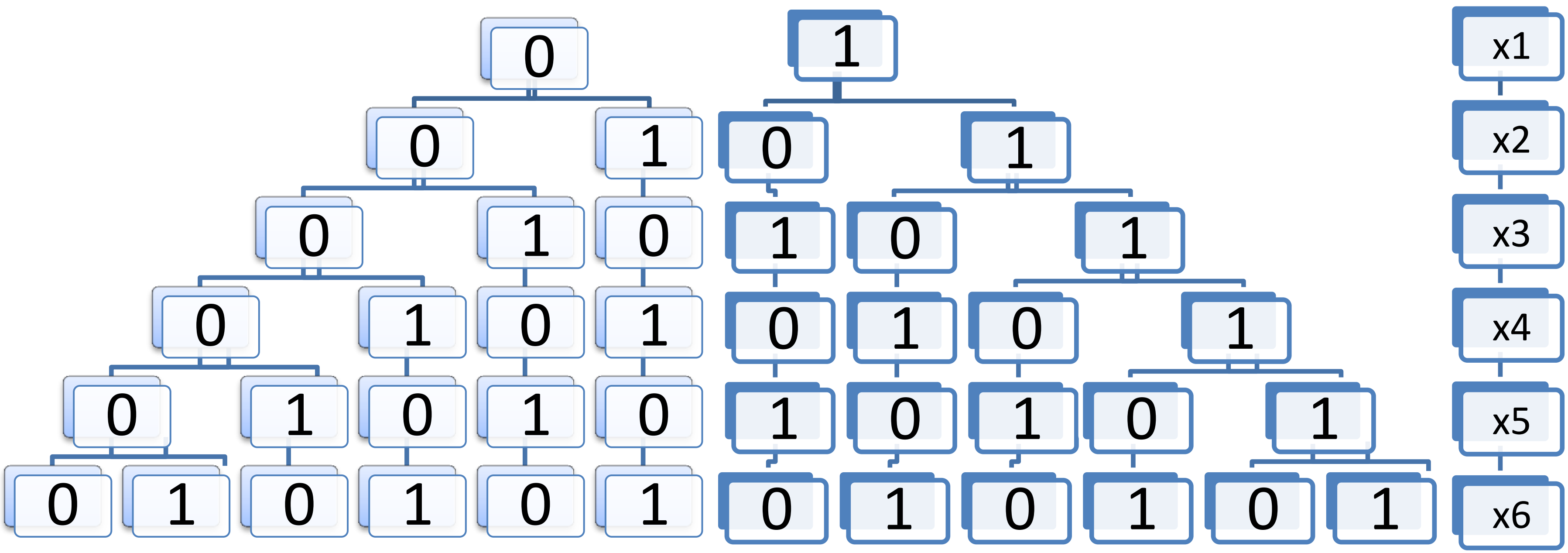
В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных X_1, X_2,X_3,…X_9, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)=1$$
$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)=1$$
…
$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_7) \vee (X_7 \equiv X_9)=1$$

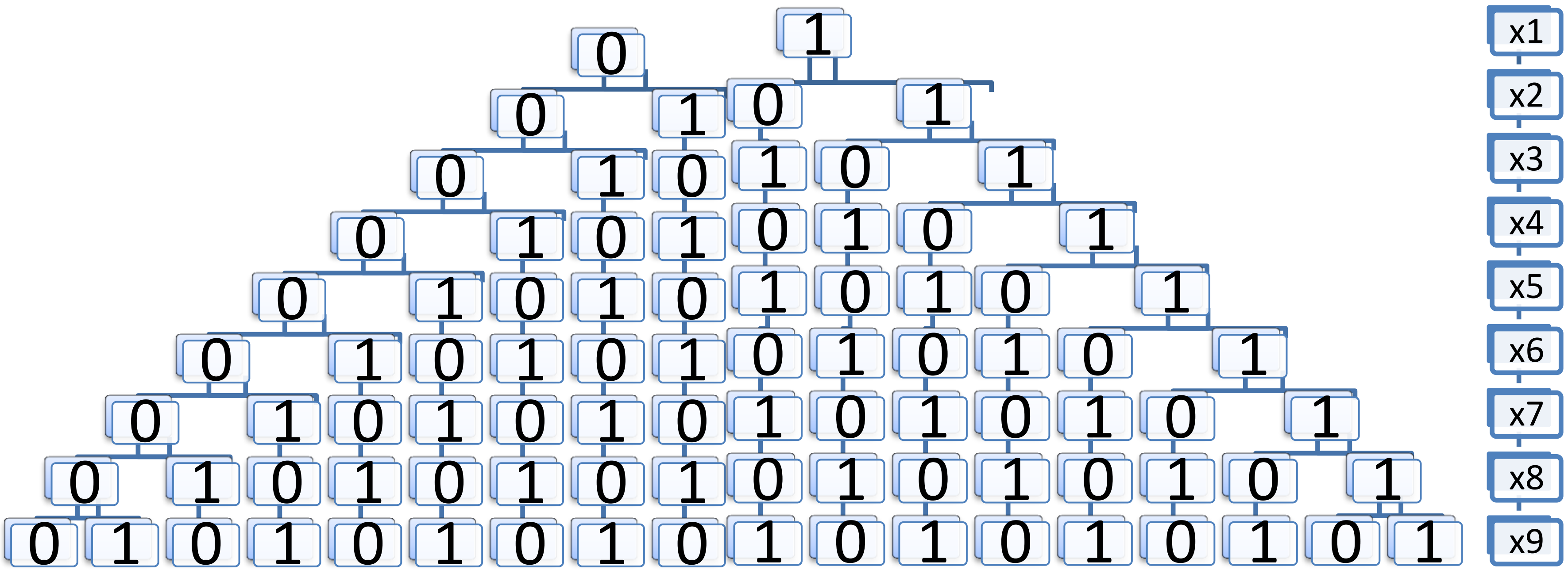
1. **Упрощение логических выражений**

$$(X_1 \equiv X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)=1$$
$$(X_2 \equiv X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)=1$$
…
$$(X_7 \equiv X_8) \vee (X_7 \equiv X_9)=1$$

Построение дерева решений логического выражения



Предугадывание результатов построения дерева



Сколько существует различных наборов значений логических переменных X_1, X_2,X_3,X_4, Y_1, Y_2,Y_3,Y_4 которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям ?

$$((X_1 \equiv X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)) \wedge ((Y_1 \equiv Y_2) \vee (Y_1 \equiv Y_3)) = 1$$

$$((X_2 \equiv X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)) \wedge ((Y_2 \equiv Y_3) \vee (Y_2 \equiv X_4)) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных X_1, X_2,X_3,X_4, Y_1, Y_2,Y_3,Y_4, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Обработка независимых логических выражений в системе

$$\begin{cases} ((X_1 \equiv X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)) \wedge ((X_2 \equiv X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)) = 1 \\ ((Y_1 \equiv Y_2) \vee (Y_1 \equiv Y_3)) \wedge ((Y_2 \equiv Y_3) \vee (Y_2 \equiv X_4)) = 1 \end{cases}$$

Первое выражение имеет 8 решений и второе 8. Система будет иметь 64 решения.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных A1,A2,A3,…A12, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям ?

$$((A1 \wedge A2) \equiv (A3 \wedge A4)) \vee ((A1 \wedge A2) \equiv (A5 \wedge A6))=1$$

$$((A3 \wedge A4) \equiv (A5 \wedge A6)) \vee ((A3 \wedge A4) \equiv (A7 \wedge A8))=1$$

$$((A5 \wedge A6) \equiv (A7 \wedge A8)) \vee ((A5 \wedge A6) \equiv (A9 \wedge A10))=1$$

$$((A7 \wedge A8) \equiv (A9 \wedge A10)) \vee ((A7 \wedge A8) \equiv (A11 \wedge A12))=1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных A1,A2,A3,…A12, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Метод замены

Заменим $X1=A1 \wedge A2$, $X2= A3 \wedge A4$,

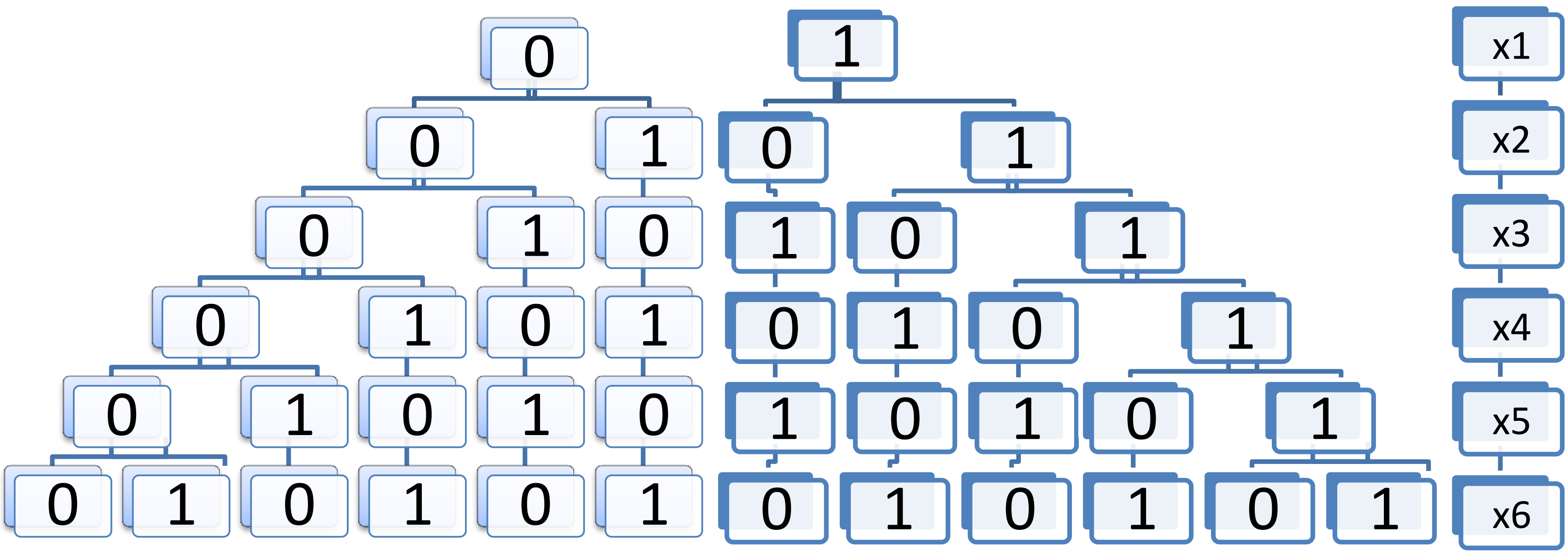
$X3= A5 \wedge A6$, ……, $X6= A11 \wedge A12$,

И система

$$((A1 \wedge A2) \equiv (A3 \wedge A4)) \vee ((A1 \wedge A2) \equiv (A5 \wedge A6))=1$$
$$((A3 \wedge A4) \equiv (A5 \wedge A6)) \vee ((A3 \wedge A4) \equiv (A7 \wedge A8))=1$$
$$((A5 \wedge A6) \equiv (A7 \wedge A8)) \vee ((A5 \wedge A6) \equiv (A9 \wedge A10))=1$$
$$((A7 \wedge A8) \equiv (A9 \wedge A10)) \vee ((A7 \wedge A8) \equiv (A11 \wedge A12))=1$$

заменится на

$$(X_1 \equiv X_2) \vee (X_1 \equiv X_3)=1$$
$$(X_2 \equiv X_3) \vee (X_2 \equiv X_4)=1$$
$$(X_3 \equiv X_4) \vee (X_3 \equiv X_5)=1$$
$$(X_4 \equiv X_5) \vee (X_5 \equiv X_6)=1$$

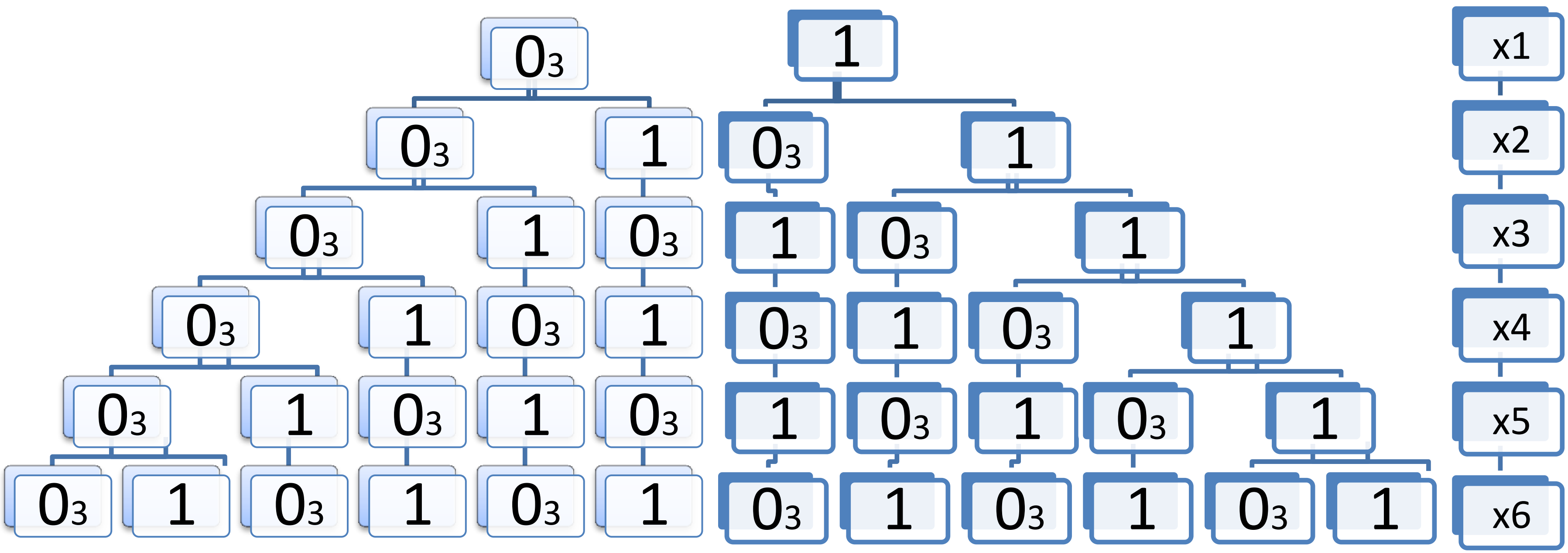


X1=A1 $\wedge$ A2=0 имеет 3 решения

X1=A1 $\wedge$ A2=1 имеет 1 решение

X2=A3 $\wedge$ A4=0 имеет 3 решения

X2=A3 $\wedge$ A4=1 имеет 1 решение и т.д.



$3^6 + 3^5 + 3^5 + 3^4 + 3^4 + 3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2 + 3 + \ 3 + \quad 1$

ОТВЕТ: 1456

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!